$SU(3)$ 大統一理論モデル

森田 知真

Abstract. 現在の大統一理論のモデルとして主流であるのはゲージ群として $SU(5)$ を用いたものであり, 対称性の破れにより, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ対称性が残ったとするものである. この理論によれば, 宇宙が始まったときに 24 個の等しい力を持ったゲージ場が存在することになる. 確かに, 1 つの結合定数ですべての相互作用が統一されることにはなるが, 24 個ものパラメーターを持つことになり, 統一理論としてはいささか不満が残るところではある. この論説では宇宙が $U(1)$ ゲージ対称性を持つことから始まると仮定して, 大統一理論を $SU(3)$ ゲージ対称性モデルとして構成したい.

1. $U(1)$ ゲージ対称性

宇宙の始まりとともに光子が出現して宇宙全体が $U(1)$ ゲージ群の作用を持つことになる. この段階で電磁相互作用の影響を受けるのは電荷を持った電子 e^- のみである. 次にハドロンを構成するクォークが出現し, そのクォーク間の相互作用を生み出すものとして $SU(2)$, $SU(3)$ ゲージ群の作用を持つことになる. 2 体間相互作用である $SU(2)$ ゲージ対称性の方が 3 体間相互作用である $SU(3)$ ゲージ対称性よりも先に生じたと考えるべきであろう. 統一理論が存在すると仮定するならば, この段階で $SU(2)$ は $U(1)$ を部分群として含むことになる.

2. $SU(2)$ ゲージ対称性

クォーク (レプトン) を 2 重項として持つ $SU(2)$ ゲージ群の極大トーラスとして, $U(1)$ ゲージ群の埋め込みは

$$U(1) \to SU(2) : e^{-i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

で与えられる. この埋め込みにより, クォーク (レプトン) は電荷を帯びるようになり, また行列の対角成分の位相の差により, 電荷を交換することになる. この原始的な状況において, その交換される電荷は電荷の最小単位 q としておくのが妥当であり, 位相差 2θ が q と対応するようになる. 例えば, 電子 e^- と電子ニュートリノ ν_e を 2 重項に持つ $SU(2)$ ゲージ群への電磁相互作用の埋め込みは同型 $U(1) \simeq U(1) : e^{-iq\theta_W} \mapsto e^{-\frac{1}{2}iq\theta_W}$ を使って

$$U(1) \to SU(2) : e^{-iq\theta_W} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\frac{q}{2}\theta_W} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{q}{2}\theta_W} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{twist}} e^{-i\frac{q}{2}\theta_W} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{q}{2}\theta_W} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{q}{2}\theta_W} \end{pmatrix}$$

Date: March 24, 2023.
Key words and phrases. ゲージ理論, 大統一理論.

で与えられることになる．一方で, 位相差 2θ が q と対応するので, 電荷 $\pm\frac{1}{2}$ を持つクォーク (レプトン) による閉じ込めも可能であるが, $SU(2)$ ゲージ対称性の破れによって, 実現はされていない．$SU(2)$ ゲージ対称性を持つことで, 電荷の異なるクォーク (レプトン) どうしが電荷を交換するために, ウィークボソン $W^{\pm}$ が必要になる．$SU(2)$ によるゲージ場の数は 3 つであり, 残りの 1 つは荷電してない Z ボソンということになる．これらの 2 体間相互作用の構成要素をもとにして 3 体間相互作用である $SU(3)$ ゲージ対称性が生じるとしたら, 前節と同様にして, この段階で $SU(3)$ は $SU(2)$ を部分群として含むことになる．

3. $SU(3)$ ゲージ対称性

$SU(2)$ ゲージ対称性により得られた異なる電荷を持つクォークを u, d として, 位相差 2θ により, u の方が d よりも電荷が q だけ高いとする．このとき, $SU(3)$ ゲージ群の 3 重項として (d, u, d) を考える．$SU(3)$ ゲージ群への $SU(2)$ ゲージ群の埋め込みは Lie 代数を用いて次のように行われる

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき, $SU(3)$ ゲージ群への $U(1)$ ゲージ群の埋め込みは

$$U(1) \to SU(3) : e^{-i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

で与えられている．ここで, 位相差 3θ が q と対応しており, 3 重項 (d, u, d) の電荷の和が 0 と規格化するとそれぞれの u, d の電荷は $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ と決定することができ, $SU(3)$ ゲージ群への電磁相互作用の埋め込みは $U(1) \simeq U(1) : e^{-iq\theta_S} \mapsto e^{-\frac{1}{3}iq\theta_S}$ を使って

$$U(1) \to SU(3) : e^{-iq\theta_S} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}iq\theta_S} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2}{3}iq\theta_S} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{1}{3}iq\theta_S} \end{pmatrix}$$

で与えられることになる．このとき, クォークは分数電荷を持つことになり, クォークの閉じ込めが起こる．さらに, この閉鎖された系の中でフェルミ粒子に対するパウリの排他律により色電荷を帯びざるを得ないことになる．このようにして $SU(3)$ ゲージ対称性が生じ, 8 種類のグルーオンボソン g が必要になるのである．

4. 対称性の破れ

ヒッグス機構による $SU(2)$ ゲージ対称性の破れにより, $U(1)$ と $SU(3)$ ゲージ対称性が残ることになり, 現在のような世界ができあがった．また, レプトンであるニュートリノ ν_e が存在しなければ, クォークの差は電子 e^- だけになり, $SU(2)$ ゲージ対称性を破ることができない．クォーク (レプトン) の種類について言えば, CP 対称性を破るには 3 世代以上のクォーク (レプトン) が存在することが必要なことだと知られている．

これまで, $U(1), SU(2), SU(3)$ ゲージ対称性を持つモデルの構成を行ってきたが, 重力のゲージ理論について考えみよう. 重力の相互作用のゲージ群がローレンツ群 $O(1,3)$ だと仮定したときに, $O(1,3)$ は最小のゲージ群であった $U(1)$ を部分群として含んでいないので, $U(1)$ ゲージ対称性と $O(1,3)$ ゲージ対称性は独立なものになる (自明な有限部分群は共有するが). この論説における $SU(3)$ ゲージ対称性の構成方法とその時点での宇宙のエネルギー密度を考えると, もし超大統一理論が存在するならば, $U(1)$ と $O(1,3)$ の両方を含むゲージ群が $SU(3)$ ゲージ対称性が生じるはるか以前に破れることになる.