微分の離散性について

森田 知真

1　はじめに

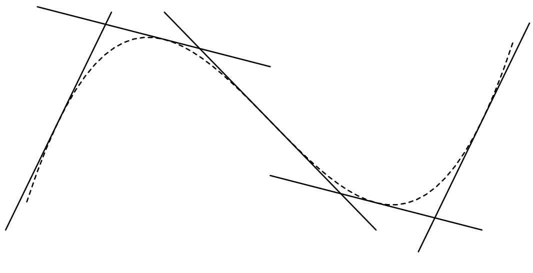
例えば, 京都から東京まで車で行く場合, 正確な経路を求めるには無限の測定が必要である. しかし, このエッセイではすべてのことが多項式の形式で書かれていれば, 微分がもつ離散性を利用して, これらの測定が有限回で済むことを論じる. また, これを使えば, 有限個のオービスによって, すべての速度違反も取り締まれることになる.

2　微分の離散性

微分法の目的の一つは, 微分可能な対象を線形に近似することである. 当然のことながら, 一般的な曲線は有限個の接線によって決定することは不可能である. 多項式で与えられる曲線では状況が一変する. 次の命題が本論説の主要な道具である.

$\boxed{\text{命題}}$ $f(x), g(x)$ を x についての多項式とし, xy-平面上の曲線 $C_1 : y = f(x)$, $C_2 : y = g(x)$ が少なくとも一つの共通点を持つものと仮定する. さらに, 十分多くの (有限個の) $x = \alpha$ において, C_1 と C_2 の接線の傾きが同じであると仮定すると $f(x) = g(x)$ が成り立つ.

$\boxed{\text{証明}}$ これは Van der Monde の行列式の結果として得られるが, 多項式のある種の剛性を用いて証明を行うことにする. $h(x) = f'(x) - g'(x)$ とし, $h(x)$ の次数が n であるとする. 仮定から, $h(\alpha) = 0$ となり, $h(x)$ は多項式で $h(x) = 0$ の解の数はせいぜい n 個なので, $h(x) \equiv 0$, つまり, $f'(x) \equiv g'(x)$ が成り立つことが分かる. さらに, 曲線 C_1 と C_2 は共通点が 1 つあるので, 定数項も等しくなり, $f(x) = g(x)$ が成り立つことになる.



有限個の接線の傾きが曲線を決定する

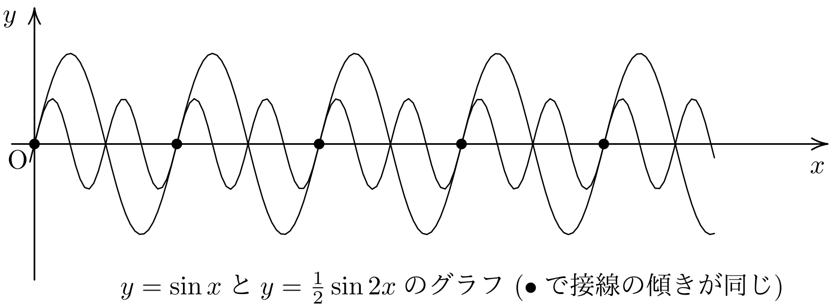
$\boxed{\text{例 1}}$ ここでは, 多項式の次数が既に分かっている場合にどのように明示的に多項式を決定するかを簡単な例で説明する．3 次式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える．接線の傾きが $f'(0) = -8$, $f'(1) = -2$, $f'(2) = 16$ と与えられ, $y = f(x)$ が原点を通るとする．このとき

$$c = -8, \quad 3a + 2b + c = -2, \quad 12a + 4b + c = 16$$

となるので, $f(x) = 2x^3 - 8x$ がわかる．この例からわかるように, 多項式の次数が前もってわかっていれば, 簡単な連立方程式の問題になり, 本質的には Van der Monde の行列を解くことに帰着される.

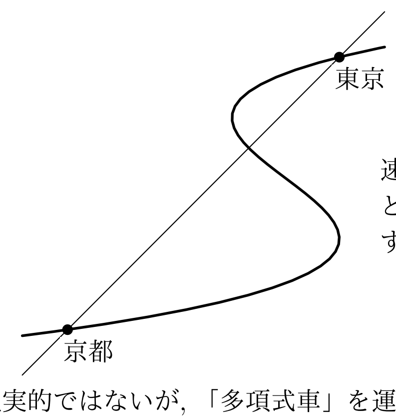
$\boxed{\text{例 2}}$ 一方, 多項式であるという仮定がなければ, トポロジーを使わなくても反例を作るのは簡単である．$f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ とするとすべての自然数 n に対して, 次のようになる

$$f'(x) = \cos x, \ g'(x) = \cos 2x \Longrightarrow f'(2n\pi) = g'(2n\pi).$$



$y = \sin x$ と $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ のグラフ (● で接線の傾きが同じ)

$\boxed{\text{例 3}}$ 時間 t に関する位置を $(x, y) = (x(t), y(t))$ とし, $x(t)$ と $y(t)$ は t の多項式であるとする．このとき, 接線の傾きは速度にほかならない．例えば, 京都から出発して東京に到着するとして, 途中で十分, 多くの速度ベクトル $(x'(t), y'(t))$ を測定すれば, どの経路をたどったかが一意に定まることになる.



速度ベクトルを有限回, 測定するだけでどの道を通り, どんな速度で通ったのかすべて決定することができる

現実的ではないが, 「多項式車」を運転する場合, 経路全体と速度が計算できるので, ひとつのオービスの前で速度を落とそうとしても無駄である.

離散性に関連して, 格子点のみからなるデジタル空間を考えてみよう. 有限回の演算しかできないので, デジタル空間上の関数 f は有限個の x_i から有限個の点 y_i への写像であると仮定する ($1 \leqq i \leqq n$). このとき, Van der Monde の行列式によって, 次数 $n-1$ 以下の多項式 $f(x)$ が一意に決まることは代数幾何の初歩でよく知られている. したがって, デジタル空間上の関数は多項式で表すことができることになる. 離散的な対象を微分することによって, その「形状」を調べるというの人類の一つの夢であったが, 上の命題が示すように, その実態は有限個の微分係数から決定されるのである.