カシミールエネルギーの数論的解釈について

森田 知真

Abstract. カシミールエネルギーの値がゼータ関数を解析接続したものの特殊値を使って求められることはよく知られた事実である．ここでは, この関係性について, 数論の立場から考察を与え, さらには, その一般化の可能性について論じたい.

1. はじめに

この小論は, [Mo] において得られた考えと弦理論における物理量の離散化という考えとを掛け合わせ, 数論的観点に立って理論を深化させたものである.

2. カシミールエネルギーとゼータ関数

場の量子論における質量 m のスカラー場のハミルトニアン $\widehat{H}$ は, 運動量 k を持つ粒子の生成演算子 $a_k^\dagger$ と消滅演算子 a_k を使って

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)$$

で与えられる．但し, ここで $\omega_k^2 = k^2 + m^2$ はクライン-ゴルドン作用素の固有値を表している．以下, 簡単のために質量 $m = 0$ とする．このとき, a_k と $a_k^\dagger$ のブラケット積を計算すると $\widehat{H} = \sum_k \omega_k(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$ と書けるので, 単位長さあたりの真空期待値は

$$E_{\mathrm{vac}} = \langle 0|\widehat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k = \frac{1}{2}\sum_k k$$

となり, 明らかに発散している．ところが, よく知られているように, この最右辺はゼータ関数 $\zeta(-1) = \text{“}1+2+3+\cdots\text{”} = -\frac{1}{12}$ を使って計算される.

では, ゼータ関数 $\zeta(s)$ の性質について少し復習することにしたい．そもそも, ゼータ関数はオイラーによって収束級数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \ \ (s \in \mathbb{Z}_{>1})$$

Date: April 24, 2019.
Key words and phrases. カシミールエネルギー, ゼータ関数, 弦理論.

として定義され, リーマンによって $s=1$ を除いて全複素平面上に解析接続されることが分かった. また, ゼータ関数の重要な性質として

$$\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}\quad(\text{オイラー積})$$

というように, 各素数 p からの寄与で書けていることが挙げられる.

上記のカシミールエネルギーの導出とゼータ関数の解析接続の仕方を比較すれば

$$(*)\quad \text{運動量}\, k \longleftrightarrow \text{整数}\, k$$

というように, 対応していると考えることができる. さらに, [Mo] において, さまざまな運動量で動いている慣性系ごとに各々の世界が拡がっていると解釈でき, これは保型形式において各素数ごとに世界が拡がっていることの類似と捉えられると述べた. これらのこととゼータ関数が上で述べたように, 各素数ごとに分解されることを考え併せると, $(*)$ で運動量が素数 p と対応するときに, どのような現象が起こるのかに関心が持たれる. そのような理論を展開するには, 上記の対応 $(*)$ は雑なものであるので (運動量は量子化されているが), まずは最小の運動量というものが定義され, 運動量全体が離散的になる必要がある. そうすれば, 関心のあるすべての物理量が整数論において得られている手法で計算できるようになると思われる.

3. 弦理論による離散化

この節では, 弦理論によって, 最小の運動量というものが定義され, 運動量全体が離散的なものになることを見る. 弦理論における時空の次元は 10 次元とも 26 次元とも言われ, 我々が時空を 4 次元だと感じているのは, 4 次元よりも大きな次元はコンパクト化という操作によって, 小さく丸め込まれていることによると言われている. 以下, この理論に沿って話をすすめる.

コンパクト化によって小さく丸めこまれた空間を内部空間と呼び, 簡単のため, それが半径 R の円周と仮定する. この操作によって, 場がコンパクト化された方向について周期化され, 物理量が量子化されることになる. 特に, コンパクト化される前は質量 0 と計算される粒子が, この操作によって KK 粒子 (Kaluza-Klein) と呼ばれる無限種類の粒子に姿を変えることになるが, それらの質量 m は整数 s を使って

$$m=\frac{|s|}{R}\quad(s\in\mathbb{Z},\ \text{自然単位系を採用})$$

で与えられることを示せる. さらに, この整数 s はコンパクト化された方向の量子化された運動量であることも分かる. これによって, 最小の運動量というものが定義され, 運動量全体が離散的なものになることが分かった. また, T-双対によって, コンパクト化された方向に運動量 s を持つ弦は, 半径 $R'=\frac{1}{2\pi TR}$ (T は弦の張力) のコンパクト化された円周に s 回巻きつく弦と同一視できることも知られている.

4. スキーム理論と Hasse-Weil ゼータ関数

各素数 p はスキーム $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ 上の点をなし, $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ の Hasse-Weil ゼータ関数

$$\zeta(s, \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})) := \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \sharp(\mathbb{F}_p)^{-s}}$$

は上で述べたゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致する. 但し, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は位数 p の有限体を表すものとする. ここで注目すべきは

(1) ゼータ関数が $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ の Hasse-Weil ゼータ関数として定義できる

(2) 各素数 p ごとに, 曲線 $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ の特殊ファイバー $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}_p) = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ が有限体の世界をなしている

ということである. まず, (1) に関して言えば, カシミールエネルギーがゼータ関数の特殊値を使って書けていたので, 物理的な量を使って, 上の Hasse-Weil ゼータ関数に相当するものを定義したい. 次の (2) については, 数論において各素数ごとに世界が拡がっているように, 物理においては, さまざまな運動量で動いている慣性系ごとに各々の世界が拡がっていると [Mo] で述べた. この二つを考え併せると, 物理的な量で環を定義し, その各ファイバーは各運動量ごとの世界を反映しているものであるのが望ましい類似である.

Definition 4.1. 整数 n に対して, n_{phys} によって, 半径 R のコンパクト化された円周方向への弦の運動量 n を表すとする. このとき, 集合 $\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}} = \left\{n_{\mathrm{phys}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に環の構造 $(+, \cdot)$ を形式的に次のように定義する

$$\text{和}: n_{\mathrm{phys}} + m_{\mathrm{phys}} = (n+m)_{\mathrm{phys}}, \quad \text{積}: n_{\mathrm{phys}} \cdot m_{\mathrm{phys}} = (n\cdot m)_{\mathrm{phys}}.$$

このように定義すれば, 上記の数論における考察と対応して

(1) カシミールエネルギーはスキーム $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}})$ の Hasse-Weil ゼータ関数の特殊値として書けることが分かる

(2) 各素数 p ごとの特殊ファイバー $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}}/p_{\mathrm{phys}}\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}})$ というのは, 運動量ごとに拡がった各世界を運動量 p ごとに同一視した世界を表すことになる

ということになり, 上で述べたことの類似になっていると言える.

さらに, 数論幾何学的な考えを用いることで上の類似を一般に推し進めたい. まずは, $\mathbb{Z}$ 上有限型の代数多様体 X が与えられたとしよう. このとき, 各素数 p ごとの $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 上のファイバー $X \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を考えると, この多様体は有限体上定義され, その上にある有理点の数 c_p を計算することができる. そして, X に対する Hasse-Weil ゼータ関数は c_p を素数 p 全体を走らせることで定義され, この関数は X についての不変量の情報を含んでいる. ここにおける原理は

- 各素数 p ごとの局所的な情報を寄せ集め, Hasse-Weil ゼータ関数によって, もとの大域的な対象の不変量を引き出すということである.

この類似を物理に求めるならば, 弦たちによる状態 W の $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}}/p_{\mathrm{phys}}\mathbb{Z}_{\mathrm{phys}})$ 上のファイバーたちを考え, それらの局所的な情報を統合し, もとの大域的な情報を得るということが考えられるであろう. この局所的な手法を導入する利点は, 上の有限体上のときと同様に, ある種の条件下で弦の個数などの計算が有限時間で確実に求めることができるということが挙げられる.

References

[Mo] Morita, K.:*On the mathematical interpretations of quantum field theory.* (In Japanese) http://kazuma-morita.jimdo.com/

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

Email address: morita@math.sci.hokudai.ac.jp